

8010

ASIGNATURA: Cálculo infinitesimal. (002)

TEMA I

EL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES

- 1.1 Introducción.
- 1.2 Números naturales, enteros y racionales:
Propiedades algebraicas y de ordenación de N , Z y Q .
- 1.3 Cuerpos:
Definición. Propiedades. Ejemplos.
- 1.4 Conjuntos ordenados:
Definición de orden en un conjunto. Ejemplos.
Conjuntos totalmente ordenados. Definiciones de cota superior e inferior, máximo y mínimo, y supremo e ínfimo. Ejemplos. Propiedades. Conjuntos bien ordenados.
- 1.5 Cuerpos ordenados:
Definición y propiedades. Ejemplo: Q .
- 1.6 Representación gráfica y decimal de los números racionales.
- 1.7 Definición de número real:
Definición de número real. Suma y producto de números reales. Orden de los números reales, compatibilidad con la estructura de cuerpo. Completitud.
- 1.8 Propiedades fundamentales del supremo.
- 1.9 Propiedad arquimediara de los números reales.

- 1.10 Valor absoluto o módulo de un número real:
Definición. Desigualdad triangular. Corolarios de la misma. Desigualdad de Cauchy-Schwartz.
- 1.11 Errores:
Error absoluto y relativo. Cotas de error. Cifras significativas. Ejemplos.

TEMA II

NUMEROS COMPLEJOS

- 2.1 Introducción.
- 2.2 Definición de número complejo.
- 2.3 Representación binómica y módulo-argumental de los números complejos.
- 2.4 Fórmula de Moivre y raíces de un número complejo.
- 2.5 Conjugado de un número complejo. Propiedades.
- 2.6 Teorema fundamental del Algebra.

TEMA III

SUCESIONES DE NUMEROS REALES

- 3.1 Introducción.
- 3.2 Definición de sucesión y ejemplos.
- 3.3 Límite de una sucesión:
Definición de límite de una sucesión. Unicidad del límite. Ejemplos. Propiedades de los límites. Definición de sucesión acotada. Sucesiones monótonas. Teorema de Bolzano Weierstrass. Definición de sucesión de Cauchy. Caracterización de Cauchy de las sucesiones convergentes.
- 3.4 Sucesiones divergentes:
Definición y clasificación. Ejemplos. Algebra de límites infinitos.

3.5 El número e:

Estudio de la sucesión $\{[1+(1/n)]^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Definición del número e. Otras sucesiones cuyo límite es e, o e^{-1} .

3.6 Límite de potencias y logaritmos.

3.7 Casos indeterminados:

Enumeración de los casos indeterminados. Reducción de todos ellos a un sólo caso. Infinitos e infinitésimos equivalentes. Ordenes de infinitos e infinitésimos. Ejemplos. Criterios de Stolz. Ejemplos. Resolución de la indeterminación 1^{∞} .

3.8 Límite superior e inferior de una sucesión:

Definición de punto adherente de una sucesión. Ejemplos. Casos en que una sucesión tiene al menos un punto adherente. Definición de límite superior e inferior. Ejemplos.

3.9 Sucesiones de números complejos:

Definición. Convergencia de una sucesión de números complejos.

TEMA IV

SERIES DE NUMEROS REALES

4.1 Introducción.

4.2 Definición de serie de números reales:

Definición de serie de números reales. Clasificación de las series. Ejemplos: serie geométrica. Propiedades de las series.

4.3 Criterio general de convergencia:

Criterio de Cauchy de convergencia de una serie. Ejemplo: serie armónica.

4.4 Suma de algunas series:

Suma de las series telescópicas e hipergeométricas.

4.5 Series de términos positivos:

Propiedades de las series de términos positivos. Criterios de comparación, Cauchy, D'Alembert, Raabe,

condensación de Cauchy y logarítmico. Ejemplos: serie armónica generalizada.

4.6 Series alternadas:

Definición. Criterio de Leibnitz. Ejemplos.

4.7 Convergencia absoluta y condicional:

Definición de convergencia absoluta, condicional e incondicional. Propiedades. Teorema de reordenación de Riemann. Ejemplos.

4.8 Criterios de Abel y Dirichlet.

4.9 Series de términos complejos:

Definición. Reducción al caso real.

TEMA V

ESPACIOS METRICOS. TOPOLOGIA DE LA RECTA REAL

5.1 Introducción.

5.2 Concepto de distancia. Espacio métrico:

Definición de distancia. Definición de espacio métrico. Desigualdad triangular generalizada. Ejemplos.

5.3 Bolas en un espacio métrico:

Bolas abiertas, cerradas y esferas. Conjuntos acotados. Diámetro de un conjunto. Distancia entre dos conjuntos.

5.4 Topología asociada a una métrica:

Definición de espacio topológico. Topología asociada a una métrica. Aplicación a \mathbb{R} y \mathbb{C} . Definición de entorno de un punto. Clasificación de los puntos respecto a un conjunto. Propiedades. Base de una topología.

5.5 Métricas equivalentes:

Definición. Ejemplos.

5.6 Sucesiones en espacios métricos:

Definición de sucesión en un espacio métrico. Convergencia. Unicidad del límite. Puntos de aglomeración. Sucesiones de Cauchy. Definición de espacio métrico completo.

- 5.7 Completación de un espacio métrico.³
- 5.8 Espacios compactos. Conjuntos compactos en R^n :
Definición. Propiedades generales de los compactos.
Caracterización de los compactos de R y R^n .
- 5.9 Espacios métricos conexos:
Definición. Caracterización de los conjuntos conexos de R .

TEMA VI

CONTINUIDAD EN ESPACIOS METRICOS

- 6.1 Introducción.
- 6.2 Definición de continuidad:
Definición. Continuidad uniforme. Propiedades.
Ejemplos.
- 6.3 Conexión por arcos:
Conexión por arcos. Ejemplos. Conexión por poligonales.
- 6.4 Aplicaciones contractivas:
Definición. Teorema del punto fijo de Banach.
Aplicaciones del Teorema del punto fijo.

TEMA VII

LIMITES Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL

- 7.1 Introducción.
- 7.2 Definición de límite de una función en un punto:
Definición de límite. Límites laterales. Ejemplos.
Caracterización del límite por sucesiones. Algebra de límites de funciones. Teorema de Cauchy
- 7.3 Infinitos e infinitésimos.

³ Este apartado puede omitirse si no se dispone de tiempo suficiente.

- 7.4 Definición de función continua:
Definición. Ejemplos. Discontinuidades. Clasificación de las discontinuidades. Ejemplos.
- 7.5 Propiedades algebraicas de las funciones continuas.
- 7.6 Teoremas de Heine-Cantor, Bolzano y Weierstrass.
- 7.7 Continuidad de la función inversa.

TEMA VIII

FUNCIONES REALES DERIVABLES DE VARIABLE REAL

- 8.1 Introducción.
- 8.2 Definición de derivada:
Definición. Derivadas laterales. Ejemplos. Función derivada.
- 8.3 Definición de diferencial:
Definición. Ejemplos. Equivalencia con la derivada. Interpretación geométrica de la derivada y de la diferencial.
- 8.4 Relación entre función derivable y función continua.
- 8.5 Algebra de derivadas. Regla de la cadena. Derivada de la función inversa. Derivadas de las funciones elementales.
- 8.6 Propiedades de las funciones derivables:
Función creciente. Definición de extremo relativo. Condición necesaria de extremo.
- 8.7 Regla de L'Hôpital.
- 8.8 Derivadas y diferenciales sucesivas. Fórmula de Leibnitz.
- 8.9 Fórmula de Taylor:
Fórmula de Taylor. Expresiones del resto. Fórmula de Mc.Laurin. Ejemplos.
- 8.10 Aplicaciones de la fórmula de Taylor:
Máximos y mínimos relativos y absolutos. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Método de Newton. Ejemplos.